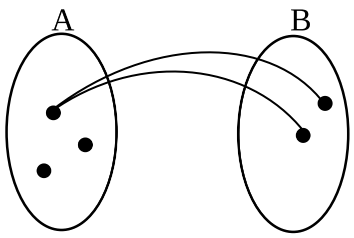
ОПШТИ ПОЈАМ ФУНКЦИЈЕ

Нека су дати скупови A и B. **Функција f** скупа A у скуп B, у ознаци f: A→B, је правило придруживања које сваком елементу скупа A додељује тачно један елемент скупа B.

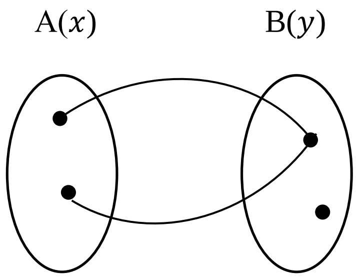
Скуп A зовемо **домен функције**, а скуп B **кодомен функције**.

Све елементе скупа A називамо **оригинали**, а елементе скупа B **слике**.



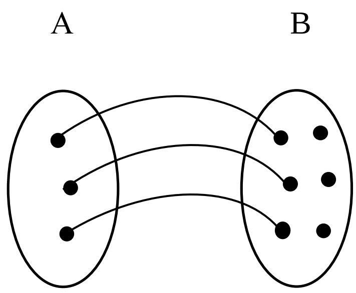
ово не би била функција (A,B,f)

***Две функције су једнаке** ако имају исти домен, кодомен и правило придуживања (A, B,f).

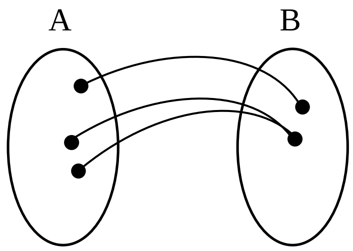


различити оригинали могу да имају исте слике

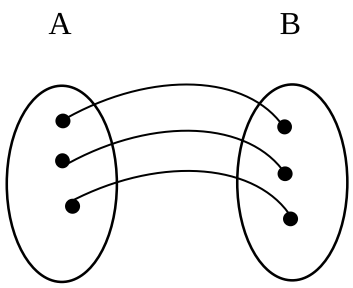
***Функција f: A→B је „1-1“ или инјкеција** ако важи $(\forall x_1 x_2 \in A)$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.



*__Функција f:A→B је „на“ или сурјекција__ ако важи (∀y∈B)(∃x∈A) $f(x)$=y.



*__Функција__ која __је__ истовремено „1-1“ и „на“, односно инјекција и сурјекција назива се **бијекција.**



Пример:
Дати су скопови x={a,b,c,d}, y={1,2,3} нека је $f:x \rightarrow y$ дата таблицом.

x	a	b	c	d
$f(x)$	3	1	2	1

Да ли је функција f:

a) сурјекција или „на“?
b) инјекција или „1-1“?
c) бијекција?

a) функција јесте „на“
b) функција није „1-1“, јер $f(b)$=$f(d)$=1
в) функција није бијекција зато што истовремено није „1-1“ и „на“

Композиција функција

Нека је функција f:A→B и g:B→C, тада можемо дефинисати функцију, у ознаци

g∘f: A→C, следећим правилом придруживања (g∘f)(x)=g(f(x)).

Функција g∘f се назива **композиција функција** g и f.

Пример:
Нека су дати скупови:
A=$\{x_1, x_2, x_3\}$

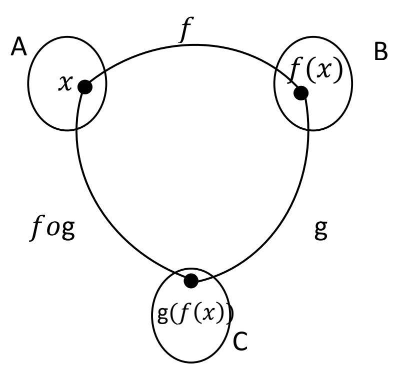
B=$\{a, b, c\}$

C=$\{1,2,3,4\}$

f:A→B
$f(x_1)=a$ - x_1 се слика у a
$f(x_2)=b$ функција није ни „1-1“ ни „на“.
$f(x_3)=a$

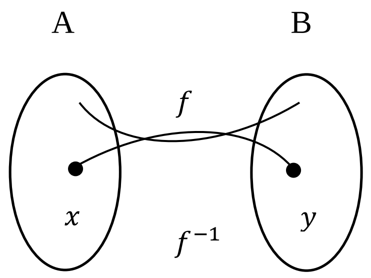
g:B→C
g(a)=1
g(b)=2 функција јесте „1-1“ а није „на“.
g(c)=4

g∘f:A→C
(g∘f)(x_1)=g($f(x_1)$)=g(a)=1
(g∘f)(x_2)=g($f(x_2)$)=g(b)=2
(g∘f)(x_3)=g($f(x_3)$)=g(a)=1



*Дефиниција **инверзне функције**.

Нека је функција f:A→B бијекција тада постоји функција f^{-1}: B→A са следећим правилом придруживања $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y$
($f^{-1}(y)=x$ ако и само ако $f(x)=y$)



*Функција f^{-1} се зове инверзна функција функције f.

РЕАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ РЕАЛНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

*Ако је f:A→B, а A,B$\subseteq R$ тада се функција fназива **реална функција реалне промељиве**.
$x \in$A $\quad$ x **независно промењива** (оригинал)
$y=f(x)$ $\quad$ y **зависно промењива** (слика)

*Правило придруживања задајемо са једном или више формула

Пример:

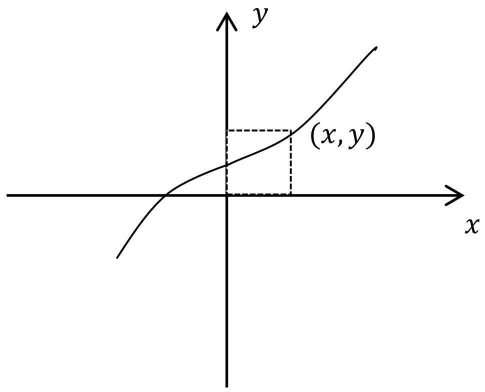
1. $f(x) = 3x + 2$ $\qquad$ $Df = (-\infty, +\infty)$
2. $f(x) = \sqrt{x-4},\quad x - 4 \geq 0$ $\qquad$ $Df = [4, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x},\quad x \neq 0$ $\qquad$ $Df=(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ отвореним интервалом искључујемо неку тачку
4. $f(x)=|x|$ $\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ D$f(-\infty, +\infty)$ функција је апослутно x

(ф-ја је $|x|$)

*Ако домен није дат онда га сами одређујемо као највећи скуп на коме правило придруживања има смисла (природни домен).

G$f = \{(x, y) | x \in Df$ и $y = \mathrm{f}(x)\}$ *овај скуп се зове график функције*

*Графика функције је:



*Да ли свака линија у равни представља график неке функције?
Одговор: НЕ.
Објашњење: Нека линија је график функције ако свака права паралелно са y осом има са том линијом највише једну заједничку тачку.

КЛАСИФИКАЦИЈА ФУНКЦИЈА ПРЕМА ЊИХОВОМ ГРАФИКУ

*Нека је f:I→R, I=(a, b)

*Дефиниција.

Функција f: I→R је **растућа** на I (свом домену), ако важи

$(\forall x_1 x_2 \in \mathrm{I})\ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

Пример:
$f(x)=3x+2$ –линеарна функција
$x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \Rightarrow 3x_1 + 2 < 3x_2 + 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

функција је строго растућа

*Дефиниција.

Функција f: I→R је **опадајућа** на I, ако важи

$(\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I})\ \ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

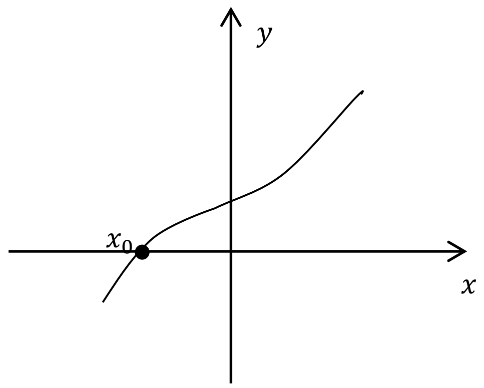
*Једним именом растуће, опадајуће, строго растуће и строго опадајуће функције називају се **монотоне функције**.

*Дефиниција.
Нека је f: I→R елеменет $x_0 \in$ I је **нула функције** f, ако важи да је $f(x_0) = 0$

Пример:

$f(x) = 3x + 2 \quad 3x + 2 = 0$
$x \to 3x + 2 \quad 3x = -2$
$x_0 \to 0 \quad x = -\frac{2}{3}$ - нула функције

*Геометријски нула функције је пресек графика са x осом.



*Дефиниција.

Нека је f: I→R, при чему је I=(-a,a) симетричан у односу на нулу (специјални домен), **функција *f* је парна** на I, ако $(\forall x \in \mathrm{I})\ f(-x) = f(x)$

Пример:
$f(x) = x^2$ Df=$(-\infty, +\infty)$ -домен је симетричан
$f(-x) = (-x)^2$=x^2=$f(x)$ -функција је парна

*Дефиниција:

Функција *f* је непарна на I, ако $(\forall x \in \mathrm{I})\ f(-x) = -f(x)$

Пример:
$f(x) = x^3$ Df=$(-\infty, +\infty)$
$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ функција је непарна

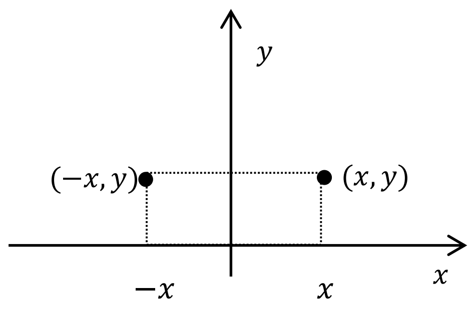


график парне функције

*График парне функције је симетричан у односу на y осу.

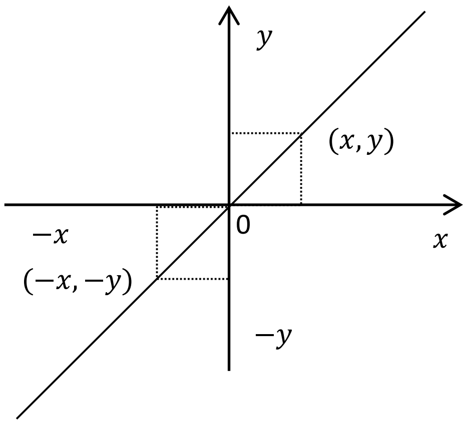


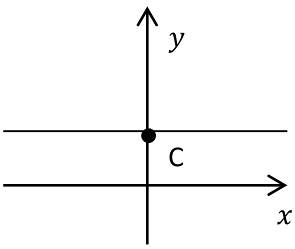
график непарне функције

*Графика непарне функције је симетричан у односу на координатни почетак.

ЕЛЕМЕНТАРНЕ ФУНКЦИЈЕ

1. КОНСТАНТНА ФУНКЦИЈА

$f(x) = C$ вредност сваког x је c



вредност сваког x је C

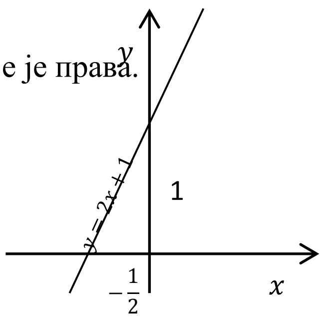
график је паралелан са x осом

Домен Df= $(-\infty, +\infty)$

2. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

$f(x) = ax + b, a \neq 0$
домен Df=$(-\infty, +\infty)$
*график линеарне функције је права.

Пример:



x	0	$-\frac{1}{2}$
y	1	0

Особине функције:

1.Домен функције, $Df = (-\infty, +\infty)$

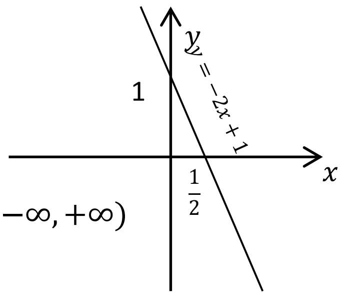
2.Нула функције, $y = 0$, за $x = -\frac{1}{2}$

3.Знак функције, $y > 0$, за $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$

$y < 0$ за $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$

4.Функција је растућа када је $a > 0$ функција је растућа

Пример:



x	0	$\frac{1}{2}$
y	1	0

Особине:

Особине:

1.Домен функције: $Df = (-\infty, +\infty)$

2.Нула функције: $y = 0$, за $x = \frac{1}{2}$ пресек са x осом

3.Знак функције: , $y > 0$, за $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$

$y < 0$ за $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$

4.Функција је опадајућа када је $a < 0$ функција је опадајућа

3. КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$

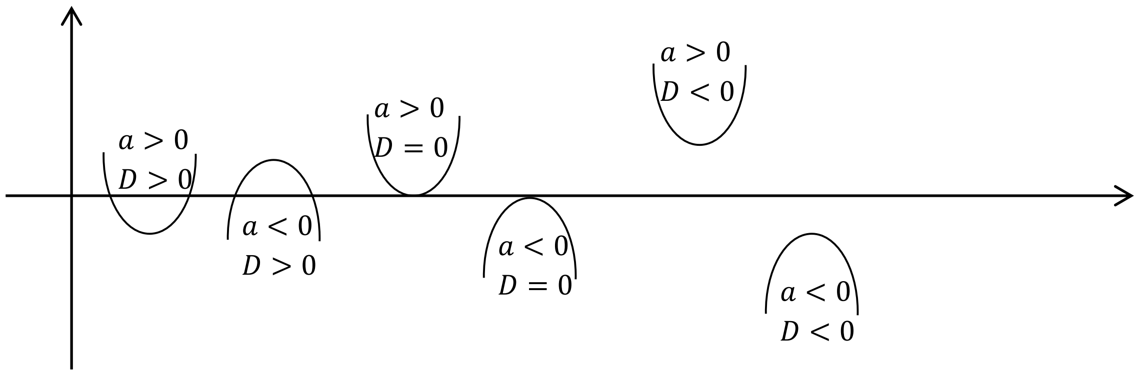
-график квадратне функције је парабола

$a > 0$  $a < 0$ 

-нуле функције $(ax^2 + bx + c)$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$D = b^2 - 4ac$ дискриминанта



5. **ПОЛИНОМ** $n -$ тог степена $Pn(x)$

$$Pn(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0$$

Пример :
$x^3 + 2x^2 - 5 \quad D = (-\infty, +\infty)$

6. **РАЦИОНАЛНА ФУНКЦИЈА** $R(x)$

$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ D: $Q_m(x) \neq 0$

$n < m$ – права рационална функција
$n \geq m$ – неправа рационална функција

Пример:
$\frac{3x^3 + 2x - 5}{x^4 + 6x^2 + 7x + 10}$ права рационална функција.

*Ако додатно користимо и операцију кореновања, добијамо и ирационалне функције
Пример:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2} + x - 5}{x^3 + 2x^2 + \sqrt{x + b}}$$

*Једним именом полиноми рационалне функције и ирационалне функције зову се алгебарске функције.

*Функције које се могу добити (+,-,×,÷) и кореновање зову се неалгебарске функције.

НЕАЛГЕБАРСКЕ (ТРАНСЦЕДЕНТНЕ) ФУНКЦИЈЕ

***ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ** $\boldsymbol{y = a^x}, \quad \boldsymbol{a > 0}, \quad \boldsymbol{a \neq 1}$

$a^n = \underbrace{a \times a \ldots \times a}_{n \text{ пута}}$

$a^0 = 1$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ $\qquad\qquad Df = (-\infty, +\infty)$

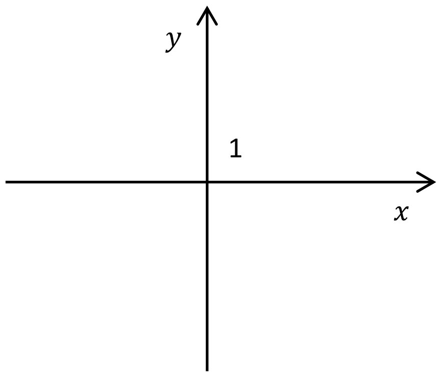
***График функције када је основа већа од 1**

$$\boldsymbol{y = a^x}, \quad \boldsymbol{a > 1}$$

Пример:

$y = 2^x, \quad y = e^x$ $\qquad$ е је број између 2 и 3

$a > 1$

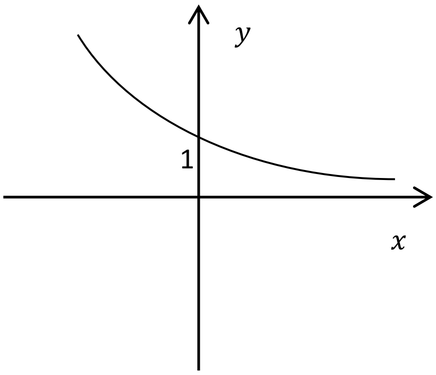


Функција је ограничена са доње стране, а са горње не.
Особине:
1.Домен $Df = (-\infty, +\infty)$
2.Функција нема нуле функције
3.Знак, функција је увек позитивна, $y > 0$ а $x \in (-\infty, +\infty)$
4.Функција је растућа

***График функције када је основа између 0 и 1**

$$y = a^x \quad 0 < a < 1$$

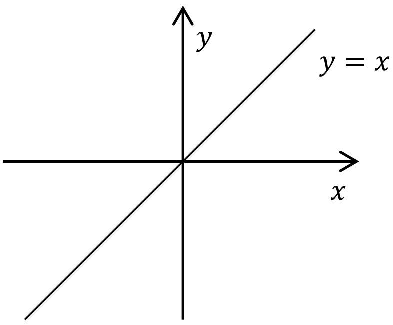
Пример:
$y = (\frac{1}{2})^x$ -експоненцијална функција



Особине:
1. Домен $Df = (-\infty, +\infty)$
2.Функција нема нуле функције
3. Знак, функција је увек позитивна, $y > 0$ а $x \in (-\infty, +\infty)$
4.Функција је опадајућа
5.Функција није ограничена (односно само је одоздо ограничена, а одозго не)

ОДНОС ГРАФИКА ИНВЕРЗНИХ ФУНКЦИЈА

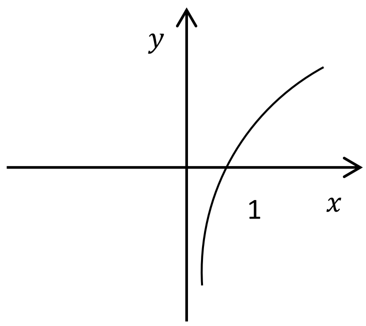
*Графици инверзних функција су симетрични у односу на праву $y = x$ која пролази кроз координатни почетак под углом од 45°.



$a^x: (-\infty, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$

$* \, a > 1$ има инверзну (јер је строго растућа ("1-1" и "на")) бијекција и њена инверзна функција је **ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА** $\boldsymbol{y = \log_a x, \; a > 0, \; a \neq 1, x > 0}$

$* \, \boldsymbol{y = \log_a x, \qquad a > 1 \quad x > 0}$



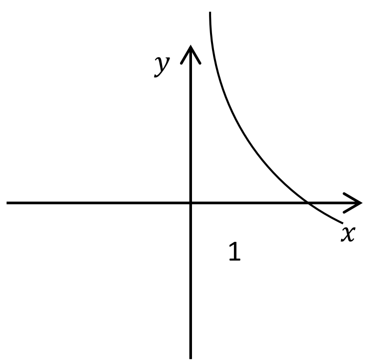
Особине:
1.Домен, $Df = (0, +\infty)$
2.Нула функције, $y = 0,$ за $x = 1$
3.Знак функције $\quad y > 0,$ за $x \in (1, +\infty)$
$\qquad\qquad\qquad y < 0,$ за $x \in (0,1)$
4.Функција је растућа и неограничена

Специјални случајеви:
Пример:

$y = lnx(\log_e x)$
$y = logx(\log_{10} x)$

$** \, \boldsymbol{y = \log_a x \qquad 0 < a < 1}$

$Df = (-\infty, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$



Особине:
1.Домен, $Df = (0, +\infty)$
2.Нула функције, $y = 0,$ за $x = 1$
3.Знак функције, $y > 0,$ за $x \in (0,1)$
$y < 0,$ за $x \in (1, +\infty)$
4.Функција је опадајућа

Пример:
$y = 2^x \quad 2^3 = 8 \qquad 3 \to 8$
$y = \log_2 x$ инверзна
$\log_2 8 = 3 \qquad 8 \to 3$
$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$